FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES – 1ère S

POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

$P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$

- Discriminant : $\Delta=b^2-4ac$
- Forme canonique : $P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$
- Coordonnées du sommet de la parabole : $S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, qui correspond au maximum si $a<0$, au minimum si $a>0$.
- Racines et factorisation :

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
Racines de $P(x)$	2 racines : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	1 racine double : $x_0=-\frac{b}{2a}$	Pas de racine
Factorisation de $P(x)$	$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$	$P(x)=a(x-x_0)^2$	Pas de factorisation

FONCTIONS DÉRIVÉES

On note D_f l'ensemble de définition de la fonction f et $D_{f'}$ son domaine de dérivation.

$\boldsymbol{D_f}$	$\boldsymbol{f(x)=}$	$\boldsymbol{D_{f'}}$	$\boldsymbol{f'(x)=}$
$\mathbb{R}$	k (constante)	$\mathbb{R}$	0
$\mathbb{R}$	$ax+b$ (fonction affine)	$\mathbb{R}$	a
$\mathbb{R}$	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}$	x^n (avec $n\in\mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$\frac{1}{x^n}$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$)	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$[0;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

u et v sont des fonctions définies et dérivables sur I .	**Si $f(x)$ s'écrit**	**alors f est dérivable sur I et $f'(x)$ est égal à**
Somme $u+v$	$f(x)=u(x)+v(x)$	$f'(x)=u'(x)+v'(x)$
Produit ku **par un nombre réel** k	$f(x)=ku(x)$	$f'(x)=ku'(x)$
Produit uv	$f(x)=u(x)v(x)$	$f'(x)=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$
Inverse $\frac{1}{v}$ où $v(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$	$f(x)=\frac{1}{v(x)}$	$f'(x)=-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$
Quotient $\frac{u}{v}$ où $v(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$	$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$

SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

- Suite arithmétique (u_n) de raison r : pour tous entiers $k\leqslant n$, on a :
  - $u_n=u_0+nr$
  - $u_n=u_k+(n-k)r$
  - $u_0+\ldots+u_n=\sum_{i=0}^{n} u_i=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$
  - $u_k+\ldots+u_n=\sum_{i=k}^{n} u_i=(n-k+1)\frac{u_k+u_n}{2}$
  -
- Suite géométrique (u_n) de raison $q\neq 1$: pour tous entiers $k\leqslant n$, on a :
  - $u_n=u_0 q^n$
  - $u_n=u_k q^{n+k}$
  - $u_0+\ldots+u_n=\sum_{i=0}^{n} u_i=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
  - $u_k+\ldots+u_n=\sum_{i=k}^{n} u_i=u_k\frac{1-q^{n-k+1}}{1-q}$

ANGLES ORIENTÉS

- Relation de Chasles : Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$ **.**

- Conséquences : Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
  $(\vec{v},\vec{u})=-(\vec{u},\vec{v})$ $\quad(-\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$ $\quad(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$ $\quad(-\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$

TRIGONOMÉTRIE

- Quelques valeurs usuelles :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{4}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

- Angles associés : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$\cos(-x)=\cos(x)$	$\cos(\pi+x)=-\cos(x)$	$\cos(\pi-x)=-\cos(x)$
$\sin(-x)=-\sin(x)$	$\sin(\pi+x)=-\sin(x)$	$\sin(\pi-x)=\sin(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$

- Résolution des équations trigonométriques :

  - **Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(x)=a$ avec $a\in\mathbb{R}$.**
    Si $a<-1$ ou $a>1$: l'équation n'a pas de solution.
    Si $a=1$: $\cos(x)=1 \Leftrightarrow x=0+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
    Si $a=-1$: $\cos(x)=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
    Si $-1<a<1$: On cherche une solution particulière x_0 : $\cos(x_0)=a$.
    $\cos(x)=a \Leftrightarrow x=x_0+2k\pi$ ou $x=-x_0+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

  - **Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(x)=a$ avec $a\in\mathbb{R}$.**
    Si $a<-1$ ou $a>1$: l'équation n'a pas de solution.
    Si $a=1$: $\sin(x)=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
    Si $a=-1$: $\sin(x)=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
    Si $-1<a<1$: On cherche une solution particulière x_0 : $\sin(x_0)=a$.
    $\sin(x)=a \Leftrightarrow x=x_0+2k\pi$ ou $x=\pi-x_0+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

VECTEURS ET COLINÉARITÉ

Dans un repère du plan, A a pour coordonnées (x_A, y_A) et B a pour coordonnées (x_B, y_B) .

- $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.
- Si le repère est **orthonormal**, alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ colinéaires équivaut à $x y' - y x' = 0$.
- Toute droite d'équation cartésienne $a x + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ admet le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Dans un repère **orthonormal**, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $k \in \mathbb{R}$, on a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(k \vec{u}) \cdot v = k (\vec{u} \dot{\vec{v}})$

Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$.

- Trigonométrie : Pour tous réels a et b ,
  - $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$
  - $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$
  - $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$
  - $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$
  - $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
  - $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- L'équation du cercle de centre $A(x_A ; y_A)$ et de rayon $R > 0$ est $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$.

STATISTIQUES

On s'intéresse à un caractère prenant différentes valeurs. On suppose que le caractère prend p valeurs différentes. Les différentes valeurs du caractère sont notées x_1, x_2, ..., x_p d'effectifs respectifs n_1, n_2, ..., n_p.
n_i est donc l'effectif de la valeur x_i.

On peut donc résumer la série par un tableau statistique :

Valeur du caractère	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

Effectif total : $N=n_1+n_2+...+n_p$ Fréquence de la valeur x_i : $f_i=\frac{n_i}{N}$

- Indicateurs de tendance centrale :
  - Mode : C'est la valeur la plus fréquente.
  - Moyenne : $\bar{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+...+n_px_p}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{p}n_ix_i}{N}$ ou
    $\bar{x}=f_1x_1+f_2x_2+...+f_px_p=\sum_{i=1}^{p}f_ix_i$
  - Médiane : On suppose que les valeurs de la série d'effectif N sont rangées par ordre croissant, chacune étant répétée autant de fois que son effectif : $x_1\leq x_2\leq ...\leq x_N$.
    - Si N est impair, $Me=x_{\frac{N+1}{2}}$
    - Si N est pair, $Me=\frac{x_{\frac{N}{2}}+x_{\frac{N}{2}+1}}{2}$
- Indicateurs de position :

  Les valeurs de la série d'effectif N sont rangées par ordre croissant (chacune d'elle étant répétée autant de fois que son effectif) : $x_1\leq x_2\leq ...\leq x_N$.

  - Quartiles : Le premier quartile Q_1 de la série est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{N}{4}$. Le troisième quartile Q_3 de la série est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{3N}{4}$.
  - Déciles : Le premier décile d_1 de la série est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{N}{10}$. Le neuvième décile d_9 de la série est la valeur x_i dont l'indice i est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{9N}{10}$.

- Indicateurs de dispersion :

  - Variance : $V=\dfrac{n_1(x_1-\overline{x})^2+n_2(x_2-\overline{x})^2+\ldots+n_p(x_p-\overline{x})^2}{N}=\dfrac{\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i-\overline{x})^2}{N}$ ou

    $V=\dfrac{n_1 x_1^2+n_2 x_2^2+\ldots+n_p x_p^2}{N}-\overline{x}^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{N}-\overline{x}^2$.
  - Écart-type : $\sigma=\sqrt{V}$.
  - Écart inter-quartile : $E_i=Q_3-Q_1$.
  - Étendue : C'est la différence entre les valeurs extrêmes de la série : la plus grande moins la plus petite.

PROBABILITÉS

- Loi de probabilité :

$\Omega=\{\omega_1;\omega_2;\ldots;\omega_n\}$ est l'ensemble des issues réelles d'une expérience aléatoire. On a une loi de probabilité définie sur Ω (p_i est la probabilité de l'issue ω_i pour $1\leq i\leq n$).

Espérance : $\mu=\sum_{i=1}^{n} p_i\omega_i$.

Variance : $V=\sum_{i=1}^{n} p_i(w_i-\mu)^2$ ou $V=\sum_{i=1}^{n} p_i w_i^2-\mu^2$.

Écart-type : $\sigma=\sqrt{V}$.

- Évènements :

  - $P(\emptyset)=0$
  - $P(\Omega)=1$

  Pour tous évènements A et B , on a :
  - $0\leq P(A)\leq 1$
  - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
  - $P(\overline{A})=1-P(A)$
  - $P(\overline{A\cap B})=P(\overline{A}\cup\overline{B})$
  - $P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})$

- Variables aléatoires :

$X(\Omega)=\{x_1;x_2;\ldots;x_m\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
On a une loi de probabilité définie sur $X(\Omega)$ (p_i est la probabilité de l'évènement $(X=x_i)$ pour $1\leq i\leq m$).

Espérance : $E(X)=\sum_{i=1}^{m} p_i x_i$.

Variance : $V(X)=\sum_{i=1}^{m} p_i(x_i-E(X))^2$ ou $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$.

Écart-type : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

LOI BINOMIALE

- Loi de Bernoulli : X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$:
  - $X(\Omega)=\{0;1\}$
  - $P(X=0)=1-p$; $P(X=1)=p$
  - $E(X)=p$
  - $V(X)=p(1-p)$
  - $\sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$

- Coefficients binomiaux : k et n sont des entiers tels que $k \leqslant n$.
  - $\binom{n}{n}=1$
  - $\binom{n}{0}=1$
  - $\binom{n}{1}=n$
  - $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$
  - $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

- Loi binomiale : X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0;1]$ (on note $X \sim B(n;p)$) :
  - $X(\Omega)=\{0;1;...;n\}$
  - Pour $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X=k)=\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  - $E(X)=np$
  - $V(X)=np(1-p)$
  - $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

- Intervalle de fluctuation :

Soit $X \sim B(n;p)$. L'intervalle de fluctuation à 95 % d'une fréquence correspondant à la réalisation de X, sur un échantillon aléatoire de taille n , est l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ défini par :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$.
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.