Méthodes sur les suites numériques

A / Calculer un terme d'une suite numérique

Si la suite est définie de manière explicite $u_n = f(n)$, c'est un calcul d'image, on remplace n par l'indice du terme souhaité.

Exemple : (u_n) est définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^3 + 5$, on a $u_4 = 2 \times 4^3 + 5 = 133$.

Si la suite est définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, il faut calculer tous les termes jusqu'à celui souhaité. En effet, la relation de récurrence permet de calculer un terme *en fonction du précédent*.

Exemple : (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$, et on veut calculer u_3 :

La relation de récurrence permettant de calculer un terme en fonction du précédent, on peut calculer u_1 puisqu'on connait u_0 . Ensuite, avec u_1 , on pourra calculer u_2 . Et avec u_2 , calculer u_3 .

- Avec la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 3$, pour calculer u_1 , il faut remplacer n par 0 dans la relation (puisque l'indice $n+1$ doit être égal à 1) :
  $u_1 = 2u_0 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$.
- Avec la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 3$, pour calculer u_2 , il faut remplacer n par 1 dans la relation (puisque l'indice $n+1$ doit être égal à 2) :
  $u_2 = 2u_1 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 13$.
- Avec la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 3$, pour calculer u_3 , il faut remplacer n par 2 dans la relation : $u_3 = 2u_2 + 3 = 2 \times 13 + 3 = 29$.

B/ Déterminer le sens de variation d'une suite numérique

Il s'agit de déterminer si une suite est (strictement) (dé)croissante. Cependant, on résume la situation par une phrase, et non un tableau de variations comme on l'aurait fait pour une fonction.

Si la suite est définie de manière explicite $u_n = f(n)$, c'est une étude de fonction, on étudie donc la fonction f sur $[0 + \infty[$ (en général). f et (u_n) ont le même sens de variations. On peut par exemple calculer la dérivée, et étudier son signe sur $[0 + \infty[$.

Exemple : (u_n) est définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^3 + n + 5$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0 + \infty[$ par $f(x) = 2x^3 + x + 5$ (on remplace n par x)

f est dérivable sur $[0 + \infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0 + \infty[$. On a donc $f'(x) = 2 \times 3x^2 + 1 + 0 = 6x^2 + 1$. Comme un carré est toujours positif, $f'(x) > 0$ sur $[0 + \infty[$.

f est donc strictement croissante sur $[0 + \infty[$, (u_n) est donc strictement croissante.

Si la suite est définie par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$, il faut comparer un terme quelconque avec le suivant – c'est-à-dire comparer u_{n+1} et u_n .

On calcule donc $u_{n+1}-u_n$, et on étudie le signe de cette différence.

Exemple : (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=u_n+n+5 \end{cases}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=n+5$ (il suffit ici de soustraire u_n aux deux membres de la relation de récurrence). Or $n+5>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0 \Leftrightarrow u_{n+1}>u_n \Leftrightarrow (u_n)$ est strictement croissante.

C/ Déterminer si une suite numérique est arithmétique

On calcule $u_{n+1}-u_n$.

- Si on obtient une constante (c'est-à-dire qu'il n'y a plus de « n »), la suite est arithmétique, et la quantité obtenue est la raison de la suite arithmétique.

  Exemple : Si pour $n\in\mathbb{N}$ $u_n=5n+7$, alors $u_{n+1}=5(n+1)+7=5n+5+7=5n+12$ donc pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=5n+12-(5n+7)=5n+12-5n-7=5$. La suite (u_n) est arithmétique de raison 5 – en effet, $u_{n+1}-u_n=5 \Leftrightarrow u_{n+1}=u_n+5$.
- Si on n'obtient pas une constante, on choisit un contre-exemple pour montrer que le nombre que l'on ajoute pour passer d'un terme au suivant n'est pas toujours le même.

  Exemple : Si pour $n\in\mathbb{N}$ $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=u_n+n^2 \end{cases}$, on a $u_{n+1}-u_n=n^2$. Ce n'est pas une constante, on penche plutôt pour une suite non arithmétique... Pour le prouver, on *choisit* un contre-exemple (il faut prendre aux moins deux valeurs de n):

  - Si $n=0$, $u_1-u_0=0^2=0$ donc $u_1=u_0+0$.
  - Si $n=1$, $u_2-u_1=1^2=1$ donc $u_2=u_1+1$.

  La suite n'est donc pas arithmétique, puisque l'on ajoute 0 pour passer de u_0 à u_1 , et 1 pour passer de u_1 à u_2 .

  (on pouvait aussi avec la relation de récurrence calculer u_1 puis u_2 , puis calculer les deux différences u_1-u_0 et u_2-u_1 , mais c'était ici plus long).

On peut aussi si la suite est définie par une relation explicite s'appuyer sur la formule des suites arithmétiques $u_n=u_0+nr$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Exemple : Si pour $n\in\mathbb{N}$ $u_n=2n+7$, on a $u_n=rn+u_0$ avec $r=2$ et $u_0=7$. (u_n) est arithmétique de raison 2.

D/ Déterminer si une suite numérique est géométrique

On cherche s'il existe une constante k telle que $u_{n+1}=k u_n$ pour $n\in\mathbb{N}$. La constante sera la raison de la suite géométrique.

Si on ne trouve pas cette constante, il y a de fortes chances que la suite ne soit pas géométrique. On illustre *en choisissant* au moins un contre-exemple pour montrer que l'on ne multiplie pas toujours par le même nombre pour passer d'un terme au suivant.

Exemple 1 : Si (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=5u_n \end{cases}$, (u_n) est géométrique de raison 5.

Exemple 2 : Si (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=(n+3)u_n \end{cases}$, on penche plutôt pour une suite non géométrique.

On a donc $u_1=(0+3)u_0=3\times1=3$ et $u_2=(1+3)u_1=4\times3=12$. Comme $\frac{u_1}{u_0}=\frac{3}{1}=3$ et $\frac{u_2}{u_1}=\frac{12}{3}=4$, (u_n) n'est pas géométrique – en effet, on multiplie par 3 pour passer de u_0 à u_1 et par 4 pour passer de u_1 à u_2 .

On peut aussi si la suite est définie par une relation explicite s'appuyer sur la formule des suites géométriques $u_n=u_0\times q^n$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Exemple : Si pour $n\in\mathbb{N}$ $u_n=3\times4^n$, on a $u_n=u_0\times q^n$ avec $u_0=3$ et $q=4$. (u_n) est donc géométrique de raison 4.

On peut aussi, pour $n\in\mathbb{N}$ calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et regarder si on obtient une constante. Cependant, la difficulté est ici d'être sûr que l'on ne divise pas par zéro !